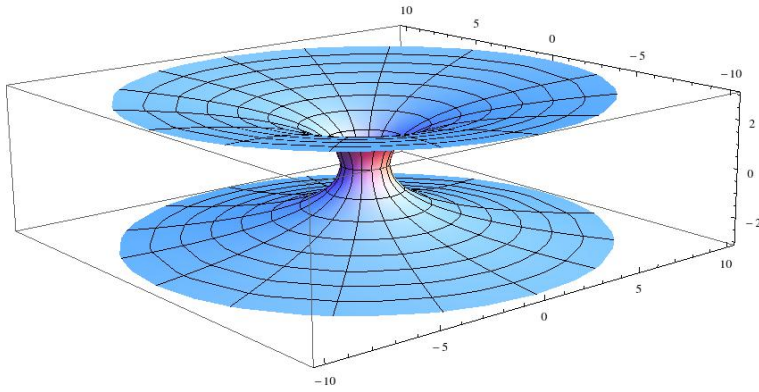


Άσκηση: Απλό Πρότυπο Χωροχρονικής
Σκουλικότρυπας

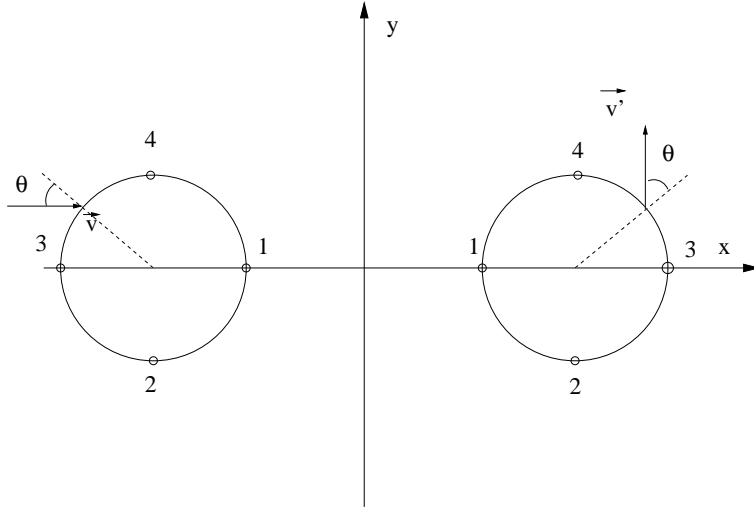


Σχήμα 1: Η χωρική γεωμετρία της σκουλικότρυπας. Δύο ασυμπτωτικά επίπεδα μέρη του χώρου συνδέονται με ένα “λαιμό” ό οποίος μπορεί να κανονιστεί να είναι μικρού “μήκους”.

1 Πρόβλημα

Η χωροχρονική σκουλικότρυπα είναι η απλή χωροχρονική γεωμετρία που συνδέει δύο απομακρυσμένες περιοχές του χώρου οι οποίες είναι ασυμπτωτικά επίπεδες (δηλ. σε αρκετά μεγάλη απόσταση από τα στόμια της σκουλικότρυπας, ο χώρος είναι σχεδόν επίπεδος). Μια τέτοια γεωμετρία φαίνεται στο Σχήμα 1. Απόσταση που διανύει κάποιος περνώντας από τα στόμια της τρύπας, μπορεί να είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση των στομιών που διανύει κανείς εκτός της σκουλικότρυπας οπότε, θεωρητικά τουλάχιστον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για διαστρικά / διαγαλαξιακά ταξίδια. Ή, όπως φαίνεται και στο σχήμα, να επικοινωνήσουν περιοχές του χώρου που θα ήταν διαφορετικά ασύνδετες μεταξύ τους.

Στην άσκηση αυτή θα μελετήσουμε μια πολύ απλή τέτοια γεωμετρία στο επίπεδο, καθώς και την ελεύθερη κίνηση σωματιδίου μέσα σε αυτή. Η ιδέα αυτή είναι άσκηση στο βιβλίο του J. B. Hartle, “Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity”, Addison Wesley 2003, Κεφ. 7, Ασκ. 25. Παίρνουμε το επίπεδο και αφαιρούμε δύο δίσκους ακτίνας R που τα κέντρα τους απέχουν απόσταση d όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Ταυτοποιούμε τα σημεία των κύκλων έτσι ώστε το σημείο 1 στον αριστερό κύκλο να ταυτίζεται με το σημείο 1 στον δεξιό, το σημείο 2 με το σημείο 2 κ.ο.κ. Οι δύο κύκλοι δίνονται από τις παραμετρικές



Σχήμα 2: Απλό πρότυπο της χωρικής γεωμετρίας της σκουλικότρυπας που δείχνεται στο Σχήμα 1. Το σωματίδιο κινείται σε όλο το επίπεδο εκτός από τους δίσκους που έχουμε αφαιρέσει. Ο λαιμός της σκουλικότρυπας προτυποποιείται από τους δύο κύκλους $x(\theta) = \pm d/2 \pm R \cos \theta$, $y(\theta) = R \sin \theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$ και έχει μηδενικό μήκος έχοντας ταυτίσει τα σημεία του χείλους της σκουλικότρυπας. Η ταυτοποίηση γίνεται με συγκεκριμένη φορά ταυτίζοντας τα σημεία με τό ίδιο θ έτσι ώστε λ.χ. τα σημεία 1, 2, 3, και 4 να ταυτίζονται (μπορείτε να φαντασθήτε τι γίνεται αν διπλώσετε το χαρτί κατά μήκος του άξονα των y και κολλήσετε τους δύο κύκλους μαζί). Το βύθισμα ενός σωματιδίου μέσα στη σκουλικότρυπα και η ανάδυση από το άλλο χείλος γίνεται όπως φαίνεται για το διάνυσμα $\vec{v} \rightarrow \vec{v}'$.

εξισώσεις $x(\theta) = d/2 + R \cos \theta$, $y(\theta) = R \sin \theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$ για τον δεξί κύκλο και $x(\theta) = -d/2 - R \cos \theta$, $y(\theta) = R \sin \theta$, $-\pi < \theta \leq \pi$ για τον αριστερό. Τα σημεία με το ίδιο θ στους δύο κύκλους ταυτίζονται. Ένα σωματίο που βυθίζεται στο αριστερό στόμιο της σκουλικότρυπας με ταχύτητα \vec{v} αναδύεται άμεσα από το δεξί με ταχύτητα \vec{v}' όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

1. Γράψτε πρόγραμμα που να υπολογίζει την τροχιά σωματιδίου που να κινείται στη γεωμετρία του Σχήματος 2. Τα όρια της κίνησης είναι για $-L/2 \leq x \leq L/2$ και $-L/2 \leq y \leq L/2$. Όταν το σωματίο βγει εκτός των παραπάνω ορίων να πάρετε περιοδικές συνοριακές συνθήκες, δηλ. να ταυτίσετε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $x = -L/2$ με αυτά του $x = +L/2$ καθώς και αυτά του ευθύγραμμου τμήματος $y = -L/2$ με αυτά του $y = +L/2$. Ο χρήστης θα παρέχει τις παραμέτρους R , d και L καθώς και τις αρχικές συνθήκες (x_0, y_0) , (v_0, ϕ) όπου $\vec{v}_0 = v_0(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})$. Θα δίνει επίσης τις χρονικές παραμέτρους t_f και dt για κίνηση στο χρόνο στο διάστημα $t \in [t_0 = 0, t_f]$ με βήμα dt .
2. Στη γεωμετρία με $L = 20, d = 5, R = 1$, σχεδιάστε την τροχιά του σωματιδίου με $(x_0, y_0) = (0, -1)$, $(v_0, \phi) = (1, 10^\circ)$ με $t_f = 40$,

$$dt = 0.05.$$

3. Βρείτε τροχιά που να είναι κλειστή χωρίς να περνάει από τα άκρα $|x| = L/2$, $|y| = L/2$. Είναι αυτή ευσταθής ως προς μικρές αλλαγές των αρχικών συνθηκών;
4. Βρείτε άλλες κλειστές τροχιές που περνάνε μέσα από τα χείλη της σκουλικότρυπας και εξετάστε αν είναι ευσταθείς ως προς μικρές αλλαγές των αρχικών συνθηκών;
5. Προσθέστε στο πρόγραμμά σας τη δυνατότητα να υπολογίζει την απόσταση που διάνυσε το σωματίδιο. Ένα σωματίο ξεκινάει από τη θέση $(-x_0, 0)$ και κινείται προς την $+x$ διεύθυνση μέχρι τη θέση $(x_0, 0)$ με $x_0 > R + d/2$. Σχεδιάστε στο χαρτί την τροχιά που ακολουθεί και υπολογίστε την απόσταση που διάνυσε. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε τους υπολογισμούς σας με το πρόγραμμά σας.
6. Μεταβάλλετε το πρόγραμμά σας έτσι ώστε στα άκρα $|x| = L/2$, $|y| = L/2$ το σωματίο να ανακλάται ελαστικά. Επανασχεδιάστε τις τροχιές των παραπάνω ερωτημάτων.

Να σημειώσουμε πάντως, ότι παρόλο που τέτοιες γεωμετρίες έχουν εξάψει την φαντασία των φυσικών αλλά και των συγγραφέων επιστημονικής φαντασίας, η υλοποίηση τους στα πλαίσια της τρέχουσας θεωρίας για τη βαρύτητα, τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, δεν είναι δυνατή. Για την κατασκευή τους, η εξίσωση του Einstein απαιτεί εξωτικού τύπου ύλη με αρνητική πυκνότητα ενέργειας η οποία δεν έχει παρατηρηθεί στη φύση. Επίσης αναμένεται ότι τέτοια κατασκευάσματα θα ήταν ασταθή από την παραμικρή διαταραχή στη γεωμετρία που θα προκαλούνταν από λ.χ. ένα πεδίο που θα έπεφτε προς την τρύπα. Έτσι κάποιος ταξιδευτής σκουλικότρυπας θα προκαλούσε ταυτόχρονα και την κατάρρευσή της. Αν ήταν δυνατόν να κατασκευαστούν μακροσκοπικές σκουλικότρυπες οι οποίες να “αντέχαν” το πέρασμα παρατηρητών μέσα από αυτές θα είχαμε και το εξής παράδοξο: Θα μπορούσαμε να κανονίσουμε ο ταξιδιώτης της σκουλικότρυπας να βγει από το άλλο στόμιο σε προγενέστερο χρόνο, έτσι ώστε να προλάβει να συνατήσσει τον εαυτό του πριν μπει στη σκουλικότρυπα. Για την ώρα όμως αυτά είναι απλή φαντασία. Δεν έχει αποκλειστεί όμως ακόμα οι εξωτικές αυτές γεωμετρίες να παρουσιάζονται σε μικροσκοπικό επίπεδο ως κβαντικές διακυμάνσεις της γεωμετρίας (spacetime foam του A. Wheeler, διαβάστε το ενδιαφέρον βιβλίο του K.S. Thorne “Black Holes and Time Wraps: Einstein’s Outrageous Legacy”, W.W. Norton, New York).

2 Λύση

Ορίζουμε τον δεξί κύκλο c_1 από την παραμετρική σχέση

$$x(\theta) = \frac{d}{2} + R \cos \theta, \quad y(\theta) = R \sin \theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad (1)$$

και τον αριστερό κύκλο c_2 από την παραμετρική σχέση

$$x(\theta) = -\frac{d}{2} - R \cos \theta, \quad y(\theta) = R \sin \theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi. \quad (2)$$

Σε κάθε χρονική στιγμή, προωθούμε το σωματίδιο σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} t_i &= i dt \\ x_i &= x_{i-1} + v_x dt \\ y_i &= y_{i-1} + v_y dt \end{aligned} \quad (3)$$

για $i = 1, 2, \dots$ με δεδομένα (x_0, y_0) , $t_0 = 0$ και όσο $t_i \leq t_f$. Αν το σημείο (x_i, y_i) είναι εκτός των ορίων $|x| = L/2$, $|y| = L/2$ το επαναφέρουμε με τις σχέσεις $x_i \rightarrow x_i \pm L$, $y_i \rightarrow y_i \pm L$ ανάλογα με την περίπτωση. Τα σημεία με το ίδιο θ στους δύο κύκλους ταυτίζονται, είναι δηλ. τα ίδια σημεία του χώρου. Αν το σημείο (x_i, y_i) περάσει μέσα από τον κύκλο c_1 ή c_2 “βγάζουμε” το σωματίο έξω από τον άλλο κύκλο.

Το πέραςμα μέσα στον κύκλο c_1 το επισημαίνει η σχέση

$$\left(x_i - \frac{d}{2}\right)^2 + y_i^2 \leq R^2. \quad (4)$$

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε τη γωνία θ από τη σχέση

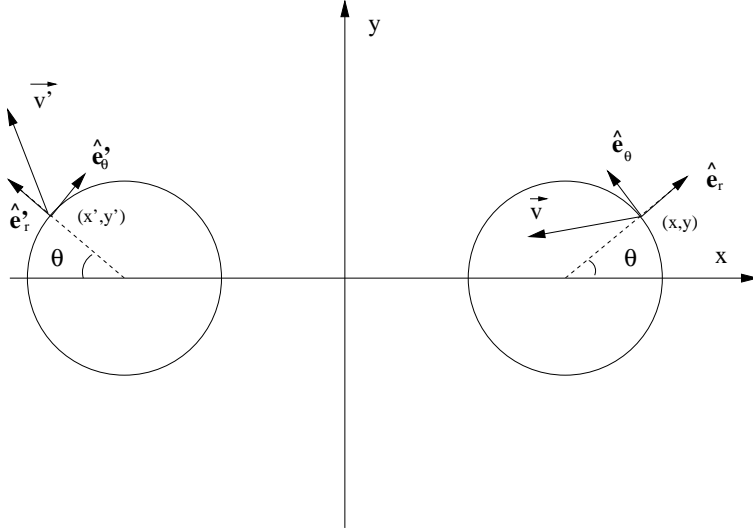
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_i}{x_i - \frac{d}{2}} \right), \quad (5)$$

και το σημείο (x_i, y_i) απεικονίζεται στο σημείο (x'_i, y'_i) όπου

$$x'_i = -\frac{d}{2} - R \cos \theta, \quad y'_i = y_i, \quad (6)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Για την απεικόνιση της ταχύτητας $\vec{v} \rightarrow \vec{v}'$ υπολογίζουμε πρώτα τα διανύσματα

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \hat{e}'_r &= -\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{e}'_\theta &= \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{aligned} \right., \quad (7)$$



Σχήμα 3: Το σωματίδιο περνάει μέσα στον δεξί κύκλο c_1 με ταχύτητα \vec{v} και αναδύεται από τον c_2 με ταχύτητα \vec{v}' . Τα ακτινικά / γωνιακά μοναδιαία διανύσματα $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$, $(\hat{e}'_r, \hat{e}'_\theta)$ ταυτίζονται από την παραμετρική ταυτοποίηση των δύο κύκλων c_1 και c_2 .

έτσι ώστε η ταχύτητα

$$\vec{v} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta \quad \rightarrow \quad \vec{v}' = -v_r \hat{e}'_r + v_\theta \hat{e}'_\theta, \quad (8)$$

όπου οι ακτινικές συνιστώσες $v_r = \vec{v} \cdot \hat{e}_r$ και $v_\theta = \vec{v} \cdot \hat{e}_\theta$. Έτσι οι τελικές σχέσεις που μας δίνουν την ταχύτητα “ανάδυσης” \vec{v}' είναι οι:

$$\begin{aligned} v_r &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ v_\theta &= -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \\ v'_x &= v_r \cos \theta + v_\theta \sin \theta \\ v'_y &= -v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \end{aligned} \quad (9)$$

Ανάλογα εργαζόμαστε και για το πέρασμα μέσα στον κύκλο c_2 το οποίο τώρα επισημαίνει η σχέση

$$\left(x_i + \frac{d}{2}\right)^2 + y_i^2 \leq R^2. \quad (10)$$

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουμε τη γωνία θ από τη σχέση

$$\theta = \pi - \tan^{-1} \left(\frac{y_i}{x_i + \frac{d}{2}} \right), \quad (11)$$

και το σημείο (x_i, y_i) απεικονίζεται στο σημείο (x'_i, y'_i) όπου

$$x'_i = \frac{d}{2} + R \cos \theta, \quad y'_i = y_i. \quad (12)$$

Για την απεικόνιση της ταχύτητας $\vec{v} \rightarrow \vec{v}'$ υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_r &= -\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{e}_\theta &= \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \hat{e}'_r &= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{e}'_\theta &= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{aligned} \right., \quad (13)$$

έτσι ώστε η ταχύτητα

$$\vec{v} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta \rightarrow \vec{v}' = -v_r \hat{e}'_r + v_\theta \hat{e}'_\theta. \quad (14)$$

Τώρα οι τελικές σχέσεις που μας δίνουν την ταχύτητα “ανάδυσης” \vec{v}' είναι οι:

$$\begin{aligned} v_r &= -v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ v_\theta &= v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \\ v'_x &= -v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ v'_y &= -v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \end{aligned} \quad (15)$$

Τα συστηματικά σφάλματα προέρχονται μόνο από τα περάσματα μέσα στη σκουλικότρυπα. Δεν υπάρχουν συστηματικά σφάλματα στο πέρασμα των ορίων $|x| = L/2$, $|y| = L/2$ (γιατί;). Σκεφτείτε τρόπους να τα αντιμετωπίσετε στο πρόγραμμά σας καθώς και να τα μελετήσετε.

Οι κλειστές τροχιές που ζητούνται προκύπτουν λ.χ. από τις αρχικές συνθήκες

$$(x_0, y_0, v_0, \phi) = (0, 0, 1, 0) \quad (16)$$

που ενώνει τα σημεία 1 του Σχήματος 2. Είναι ασταθής, και αυτό μπορεί να το δείτε παίρνοντας $\phi \rightarrow \phi + \epsilon$.

Οι κλειστές τροχιές που περνούν τη σκουλικότρυπα, αλλά “περιτυλίγονται” προκύπτουν λ.χ. από τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, v_0, \phi) &= (-9, 0, 1, 0) \\ (x_0, y_0, v_0, \phi) &= (2.5, -3, 1, 90^\circ) \end{aligned}$$

που περνούν από $3 \rightarrow 3$ και $2 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 4$ αντίστοιχα. Είναι επίσης ασταθείς όπως εύκολα μπορεί να μελετηθεί με το πρόγραμμα που θα γράψετε. Το πρόγραμμα αυτό παρατίθεται παρακάτω για πληρότητα:

```

program WormHole2D
implicit none
C -----
C Declaration of variables
real*8 PI
parameter(PI=3.14159265358979324D0)
real*8 Lx,Ly,L,R,d

```

```

real*8 x0,y0,v0,theta
real*8 t0,tf,dt
real*8 t,x,y,vx,vy
real*8 xc1,yc1,xc2,yc2,r1,r2
integer i
C -----
C   Ask user for input:
print *,'# Enter L,d,R:'
read(*,*)L,d,R
print*,'# L= ',L,' d= ',d,' R= ',R
if( L .le. d+2.0D0*R) stop 'L <= d+2*R'
if( d .le. 2.0D0*R) stop 'd <= 2*R'
print *,'# Enter (x0,y0), v0, theta(degrees):'
read(5,*)x0,y0,v0,theta
print *,'# x0= ',x0,' y0  = ',y0
print *,'# v0= ',v0,' theta= ',theta,' degrees'
if(v0 .le. 0.0D0 ) stop 'illegal value of v0.'
print *,'# Enter tf, dt:'
read(*,*)tf,dt
print *,'# tf= ',tf,' dt= ',dt
C -----
C   Initialize
theta = (PI/180.0D0)*theta
i      = 0
t      = 0.0D0
x      = x0
y      = y0
vx     = v0*cos(theta)
vy     = v0*sin(theta)
print *,'# x0= ',x,' y0= ',y,' v0x= ',vx,' v0y= ',vy
C   Wormhole's centers:
xc1    = 0.5D0*d
yc1    = 0.0D0
xc2    = -0.5D0*d
yc2    = 0.0D0
C   Box limits coordinates:
Lx     = 0.5D0*L
Ly     = 0.5D0*L
C   Test if already inside cut region:
r1     = sqrt((x-xc1)**2+(y-yc1)**2)
r2     = sqrt((x-xc2)**2+(y-yc2)**2)

```



```
print *,'# Exit    C1: (x,y,vx,vy )= ',x,y,vx,vy  
end
```

Το πρόγραμμα μεταγλωττίζεται και τρέχει κατά τα γνωστά. Στο συνοδευτικό λογισμικό θα βρείτε τα αρχεία `Wormhole.csh` και `Wormhole_animate.gnu` που μπορούν να σας βοηθήσουν στην απεικόνιση της τροχιάς. Ξεκινήστε το `gnuplot`, θέστε τις επιθυμητές παραμέτρους στο `Wormhole.csh` και δώστε τις εντολές

```
gnuplot> file = "Wormhole.dat"  
gnuplot> R=1;d=5;L=20;  
gnuplot> ! ./Wormhole.csh  
gnuplot> t0=0;dt=0.2;load "Wormhole_animate.gnu"
```